

# GUÍA DE EJERCICIOS<sup>1</sup> # 5

## MA – 1111

1.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(b) f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$(c) f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x-4}}$$

$$(d) f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x} & \text{si } x \neq -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 3 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

$$(h) f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \leq -2 \\ 2-x & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2.- Hallar los valores de  $a$  y  $b$  que hacen que las siguientes funciones sean continuas en todo el conjunto de los números reales:

$$(a) f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ ax + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} a^2x & \text{si } x < 1 \\ 3ax - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{si } x < -2 \\ 3ax + b & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2b & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (d) f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } 1 < x < 2 \\ -5x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3.- Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones, determinar qué tipo de discontinuidad es y, en caso de discontinuidad evitable, redefina la función para que sea continua en dicho punto:

$$(a) f(x) = \frac{|x^2-16|}{x^2-16}$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{x^2-9}$$

$$(c) f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-6}$$

$$(d) f(x) = \frac{x-2}{x^3+x^2-6x}$$

$$(e) f(x) = \frac{x+2}{x^3-8}$$

$$(f) f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$$

4.- Determinar si las siguientes funciones son continuas en los intervalos indicados:

---

<sup>1</sup> Profesora María T. Varela

$$(a) f(x) = \sqrt{x^2 - 9} , [3, +\infty) \quad (b) f(x) = \tan x , \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(c) f(x) = \frac{x}{x^3+8} , [-4, -3] \quad (d) f(x) = \frac{1}{|x|-2} , [-2, 2)$$

5.- Probar que la ecuación  $x^3 + 3x - 2 = 0$  tiene una solución entre 0 y 1.

6.- Probar que la ecuación  $t^3 \cos t + 6\text{sen}^5 t - 3 = 0$  tiene una solución entre 0 y  $2\pi$ .

7.- Probar que la ecuación  $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$  tiene, al menos, una solución real.

8.- Sea  $f(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$ . Probar que existe  $c \in \left[\frac{5}{2}, 4\right]$  tal que  $f(c) = 6$ .

9.- Sea  $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 + 2$ . Probar que existe un  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(c) = 6$ .

10.- Sean  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = \sqrt{x+1}$ , probar que existe un  $c \in (1, 2)$  tal que  $f(c) = g(c)$

11.- Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas en  $[0, 1]$  y tales que  $0 \leq f(x) \leq 1$  y  $0 \leq g(x) \leq 2$  para toda  $x \in [0, 1]$ . Probar que existe  $c \in (0, 1)$  tal que  $f(c) = 2 + g(c)$ .

12.- Determinar si las siguientes funciones son derivables en los puntos que se indican. En caso de serlo, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}, x = 2 \quad (b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}, x = -1$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < 3 \\ 6x - 18 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}, x = 3 \quad (d) f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, x = 0$$

13.- Determinar los valores de  $a$  y  $b$ , si existen, de manera que  $f$  sea derivable en todo su dominio:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ ax - 2b & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x < 0 \\ bx^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 3 \\ a\sqrt{3-x} + b & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad (4) f(d) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

14.- Para las siguientes funciones, hallar la ecuación de la recta tangente en el punto  $P$  que se indica:

$$(a) f(x) = x^2 + 4x, P(0, 0) \quad (b) f(x) = \frac{1}{x}, P(1, 1)$$

$$(c) f(x) = \sqrt{x}, P(4, 2) \quad (d) f(x) = \text{sen } x, P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$